

“Utilización de modelo logístico y de primer orden con retardo para fermentación de cerveza”

Collado Martin^a Casanova Leah^a; Pantano Nadia^b; Ruarte Pablo^b; Scaglia Gustavo^b
^a Instituto de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, UNSJ.
^b Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, San Juan, Argentina.
 pruarte@unsj.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo, se realiza el modelado del proceso de fermentación para la producción de cerveza utilizando datos experimentales, con el objetivo de emplearlos en futuros procesos de optimización. Para ello, se utilizan dos modelos principales: el modelo de primer orden más retardo y el modelo logístico, que representan la dinámica de la biomasa. Se busca comparar el grado de ajuste de ambos modelos y determinar cuál se adapta mejor a los datos experimentales disponibles. Para la formación del producto, se utiliza el modelo clásico de Luedeking y Piret como punto de partida. Sin embargo, para mejorar su capacidad predictiva y ajuste, se introduce una modificación desarrollada por el equipo de investigación. Esta innovación implica la inclusión de un parámetro de retardo en el modelo, que considera el tiempo de retraso entre la generación de biomasa y la producción del producto final. Este ajuste adicional es crucial para capturar de manera más precisa la dinámica del proceso y mejorar la capacidad predictiva del modelo en situaciones reales de fermentación.

Palabras clave:

Fermentación – Modelo de primer orden con retardo – Modelado matemático – Cerveza.

INTRODUCCIÓN

La fermentación es crucial en la elaboración de cerveza, ya que produce etanol y compuestos que afectan sus características organolépticas, por lo que su optimización es esencial. En la región de Cuyo, los pequeños productores de cerveza artesanal enfrentan dificultades para optimizar su producción debido a la falta de recursos en comparación con las grandes cerveceras. Para optimizar estos procesos, es necesario un modelo matemático adecuado que represente la fermentación, debido a la complejidad de la dinámica de los microorganismos, las variables de proceso acopladas y las perturbaciones externas, que generan incertidumbres en el modelado de los bioprocesos [1].

OBJETIVOS

El objetivo de este trabajo es encontrar un modelo que represente fielmente el proceso real. Para ello, se aplicará un modelo de primer orden con retardo para modelar el crecimiento de la levadura y se utilizará el modelo de Luedeking y Piret modificado con retardo para describir la producción de etanol. La modificación del tiempo de retardo, previamente desarrollada por el grupo de investigación, permite abordar las complejidades del proceso sin simplificaciones y optimizarlo con pocos datos experimentales, utilizando

un modelo simple y de fácil implementación sin requerir herramientas computacionales extensivas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se realizó una fermentación anaerobia utilizando mosto de un productor de cerveza artesanal en San Juan y levadura *Saccharomyces Cerevisiae* a 16°C. El inóculo fue preparado con 15 gramos de levadura seca en 26 litros de mosto. Se utilizó un fermentador de 30 litros conectado a un sistema de enfriamiento controlado por un algoritmo PID para mantener la temperatura constante. Las muestras se tomaron a diferentes tiempos, comenzando a las 16,6 horas y luego cada 24 horas durante un total de 7 días. El crecimiento de la levadura se midió mediante recuento celular en cámara de Neubauer.

MODELADO MATEMÁTICO

Para el crecimiento de celular se usa el Modelo de Primer Orden con Retardo (MPOR) que tiene en cuenta el fenómeno de adaptación en su primera fase metabólica de desarrollo [2]:

$$\frac{dX}{dt} + \frac{X}{T_p} = \frac{1}{T_p} \cdot X_{m\acute{a}x} (t - T_o); \quad X(0) = X_o \quad (1)$$

Donde $X_{m\acute{a}x}$ es el valor máximo alcanzado por X y la funci3n $X_{m\acute{a}x} = (t - T_o)$ se define por:

$$X_{m\acute{a}x}(t - T_o) = \begin{cases} X_{m\acute{a}x} & \text{para } t \geq T_o \\ 0 & \text{para } t < T_o \end{cases} \quad (2)$$

Quedando la expresi3n final como:

$$X(t) = \begin{cases} X_o \cdot e^{-\frac{(t-T_o)}{T_p}} + X_{m\acute{a}x}(1 - e^{-\frac{(t-T_p)}{T_p}}) & \text{para } t \geq T_o \\ X = X_o & \text{para } t < T_o \end{cases} \quad (3)$$

Para el crecimiento de la biomasa comparamos el MPOR con el Modelo Logístico [3]:

$$\frac{dX}{dt} = \mu_{max} \left(1 - \frac{X}{X_{max}}\right) X; \quad X(0) = X_o \quad (4)$$

$$X(t) = \frac{X_{max}}{1 + \left(\frac{X_{max}}{X_o} - 1\right) e^{-\mu_{max}t}} \quad (5)$$

Donde μ_{max} : tasa de crecimiento máxima específica [h^{-1}], X_o es el in3culo, por lo que es un valor conocido; X_{max} y μ_{max} tienen que ser calculados por regresi3n.

Para el seguimiento de los productos, se utilizo el modelo de Luedeking y Piret [4]. Se expresi3n matemática es:

$$\frac{dP}{dt} = Y_{p/x} \frac{dX}{dt} + m_p X; \quad P(0) = P_o \quad (6)$$

Donde: dP/dt : Velocidad de producci3n de etanol [$g/l.h$]; X : concentraci3n de de biomasa en un determinado instante de tiempo [$c3lula.L^{-1}$]. $Y_{p/x}$: rendimiento de etanol [g etanol/ g biomasa]; y m_p : coeficiente para la producci3n de etanol [g etanol/ g biomasa. h]. Los parámetros $Y_{p/x}$ y m_p suelen determinarse mediante el ajuste del modelo de Luedeking y Piret a los datos experimentales. La expresi3n final que se obtiene reemplazando (4) y (5) en (6) resulta en:

$$\frac{dP}{dt} = Y_{p/x} \left(\mu_{max} \left(1 - \frac{X}{X_{max}}\right) X \right) + m_p \left(\frac{X_{max}}{1 + \left(\frac{X_{max}}{X_o} - 1\right) e^{-\mu_{max}t}} \right); \quad (7)$$

$$P(0) = P_o$$

Introduciendo el MPOR para la producci3n de biomasa en la ecuaci3n de Luedeking y Piret con

retardo [5] y considerando que en este caso se trabajar con $m_p=0$, la ecuaci3n quedará:

$$\frac{dP}{dt} = Y_{p/x} \frac{dX(t-T_d)}{dt}; \quad P(0) = P_o \quad (8)$$

donde la funci3n $\frac{dX(t-T_d)}{dt}$ está definida por:

$$\frac{dX(t-T_d)}{dt} = \begin{cases} \frac{dX}{dt} & \text{para } t \geq T_d \\ 0 & \text{para } t < T_d \end{cases} \quad (9)$$

Donde P_o [$g.L^{-1}$] es la concentraci3n inicial del metabolito; T_d [h] es la diferencia de tiempo (retardo).

RESULTADOS

En este estudio, se ha modelado el crecimiento de biomasa en la fermentaci3n de cerveza utilizando el "Modelo de Primer Orden con Retraso" (MPOR), y el modelo de Luedeking y Piret para ajustar la producci3n de etanol.

Cinéticas de Crecimiento Celular

La Figura 1 presenta la cinética de crecimiento de levadura, $X(t)$, durante la fermentaci3n a 16 C. Se muestran tanto los puntos experimentales como los ajustes del modelo Logístico y MPOR. Nuevamente, se utilizaron los valores iniciales experimentales de X_o y se calcularon los parámetros X_{max} , μ_{max} , adaptando el modelo a las condiciones de fermentaci3n modificadas.

Esta comparaci3n permite evaluar el impacto de la temperatura en la dinámica del crecimiento celular. En el caso del modelo de primer orden con retardo se utiliz3 en X_o y se calcularon los valores de los parámetros T_o y T_p .

Cinéticas de Producci3n de Etanol

En la Figura 2, se observa la cinética de producci3n de etanol ($P(t)$), durante la fermentaci3n a 16 C. Aquí se comparan los puntos experimentales con los ajustes de los modelos de Luedeking y Piret, tanto con retardo como sin retardo. La comparaci3n muestra que el modelo de Luedeking y Piret con retardo proporciona un mejor ajuste.

Los valores de R^2 indican que el modelo de Primer Orden con Retardo (MPOR) proporciona un ajuste adecuado para predecir el comportamiento de la levadura durante la fermentaci3n.

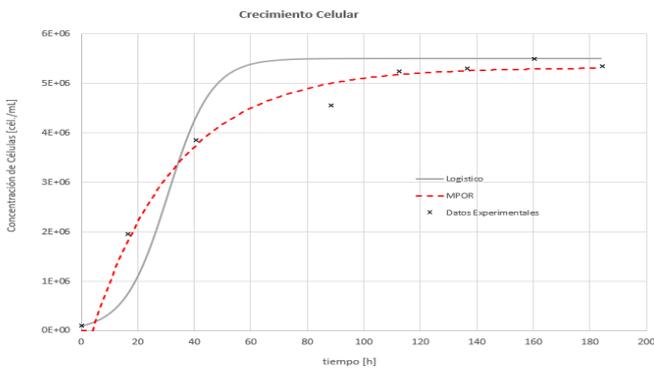


Figura 1. Ajuste matemático comparativo de la evolución de la levadura y etanol con el tiempo (x) usando el Modelo MPOR (línea de guiones rojos) y el Modelo Logístico (línea continua gris).

Biomasa		Producto	
X_{max} [cel/mL]	5500000	$Y_{P/X}$ [g etanol/g biomasa]	0
t_0 [h]	3	T_d [h]	22
T_p [h]	30	R^2 L-P-MPOR	94,6663
μ_{max} [h ⁻¹]	0,13	R^2 L-P-R-MPOR	99,5469
R^2 MPOR	98,9696	R^2 L-P-Log	92,0079
R^2 Logístico	96,0352		

Tabla 1. Parámetros cinéticos y ajuste de los modelos.

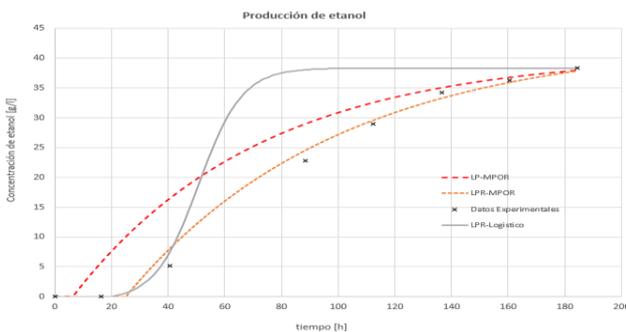


Figura 2. Ajuste comparativo de producción de etanol (x) usando el Modelo de Luedeking y Piret con el Modelo de Primer Orden con Retardo (línea de guiones rojos), el Modelo de Luedeking y Piret con retardo con el Modelo de Primer Orden con Retardo (línea de guiones marrones) y el Modelo Logístico-Luedeking y Piret con retardo (línea continua gris).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este modelo destaca por su simplicidad en el cálculo de los parámetros T_0 y T_p , lo que resalta su conveniencia matemática. La capacidad del MPOR

para prever el tiempo de latencia y el ritmo de crecimiento celular es crucial para el control y la optimización del proceso fermentativo.

Por otro lado, el modelo logístico no logró un ajuste correcto de los datos experimentales en ningún caso, lo no describe la dinámica del crecimiento celular en las condiciones estudiadas.

En cuanto a la producción de etanol, el modelo de Luedeking y Piret no describe adecuadamente este proceso bajo condiciones de fermentación estándar a 16 °C, es necesario utilizar el modelo de Luedeking y Piret con retardo para obtener un ajuste más riguroso.

Un modelo más preciso en la fermentación permite no solo optimizar el proceso y ejercer un control más exacto, sino que también asegura una producción consistente de etanol y mejora los perfiles organolépticos, lo que se traduce en un producto final de mayor calidad. Además, este enfoque optimiza el uso de recursos, reduciendo desperdicios y mejorando la eficiencia general del proceso de producción. Esto es particularmente ventajoso para los pequeños productores de la región de Cuyo, ya que les proporciona una herramienta competitiva frente a las grandes cervecerías, permitiéndoles optimizar sus procesos con menos datos experimentales y sin la necesidad de invertir en herramientas computacionales costosas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Fernandez, N. Pantano, G. Scaglia. "Additive Uncertainty Consideration for Nonlinear and Multivariable Bioprocess Control", IEEE Lat. Am.
- [2] M. Groff, G. Scaglia, S. E. Noriega, "Modification of the Luedeking and Piret model with a delay time parameter for biotechnological lactic acid production," Biotechnol.
- [3] P.F. Verhulst, "La loi d'accroissement de la population.," Nouv. Mémoires l'Académie R. des Sci.
- [4] R. Luedeking and E. L. Piret, "A kinetic study of the lactic acid fermentation. Batch process at controlled pH,"
- [5] M.C. Groff, R. Gil, C. Fernandez and G. Scaglia, "Application of the Luedeking and Piret with Delay Time Model in Bioproductions with Non-Zero Kinetic Parameters".