

## “Evaluación de técnicas estadísticas para la actualización de redes altimétricas topográficas”

Justo, Claudio<sup>a,b</sup>; Calandra, María Valeria<sup>a</sup>, Rodríguez, Franco<sup>a,b</sup>  
a UIDET GAMEFI, Dto. Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.  
b Departamento de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.  
[maría.calandra@ing.unlp.edu.ar](mailto:maría.calandra@ing.unlp.edu.ar)

### Resumen

Las redes altimétricas topográficas constituyen una herramienta fundamental para el desarrollo de la infraestructura. El modelo altimétrico topográfico, es válido para determinar las diferencias de alturas entre puntos y poder resolver la dirección del escurrimiento de fluidos en el entorno de obras. Por esto su mantenimiento y actualización se tornan prioritarios. El método de cálculo de estas redes, por excelencia, es el de Mínimos Cuadrados Ponderados. De su aplicación obtendremos las cotas y desniveles más una estimación de sus incertidumbres. A medida que se incorporan nuevas observaciones es posible el recálculo y actualización de la red. Sin embargo, eso implica conservar todas las observaciones originales pudiendo no estar dicha información accesible. Para sobrellevar esto se aplicó Mínimos Cuadrados Secuenciales en una red altimétrica de la facultad de ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Se requirió contar, con los resultados del último procesamiento prescindiendo de las observaciones, más las nuevas observaciones a incorporar. Como resultado se obtuvo una actualización de las cotas de la red y sus incertidumbres. Se muestra, también la aplicación de una herramienta estadística para evaluar la consistencia respecto de la red ajustada previamente. En este sentido se evaluó el estadístico Chow de cambio estructural y el procedimiento clásico con el estadístico Chi-Cuadrado. Se vio que el estadístico de Chow no fue sensible a los cambios esperados.

**Palabras clave:** Redes altimétricas, mínimos cuadrados secuenciales, estadístico de Chow.

### INTRODUCCIÓN

El ajuste de redes altimétricas topográficas es realizado en forma extendida mediante el método de Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) [1] para salvar la inconsistencia debida a los factores aleatorios que están siempre presentes en las mediciones y permite obtener indicadores de la calidad del trabajo realizado. El modelo altimétrico topográfico, es válido para poder dejar establecidas las alturas de marcas físicas colocadas expresamente con ese propósito, conocidas como ménsulas. En este trabajo se presenta un reajuste por Mínimos Cuadrados Ponderados Secuenciales (MCPS), sobre un trabajo realizado hace un tiempo, en una red altimétrica del campus de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI-UNLP) donde existen ménsulas distribuidas en casi todos los edificios del mismo.

### OBJETIVOS

Dado que el trabajo realizado va perdiendo vigencia con el transcurso del tiempo, se debe actualizar frecuentemente y eso implica tomar nuevas mediciones en la red y calcular nuevamente las cotas. En este caso

una de las ménsulas debió ser reemplazada debido a su destrucción total. Para evitar repetir el cálculo completo de esta red con cada observación agregada y así mantenerla actualizada, se realizó la técnica presentada en este trabajo que resulta de utilidad si el número de mediciones nuevas es relativamente pequeño con respecto al número de observaciones antiguas. El objetivo de este trabajo es evaluar la viabilidad de MCPS para la detección de alguna anomalía (si la hubiera) durante el proceso de actualización. Usualmente esto se realiza mediante un Test Chi-Cuadrado con la comparación entre la varianza del ajuste y la varianza kilométrica establecida por el fabricante del equipo de medición, también realizamos el test de Chow para ver si hay un cambio estructural. La Figura 1 muestra un esquema de las dos redes altimétricas Red1 y Red2. La Red1 que fue ajustada hace un tiempo posee 10 desniveles (Ver Tabla1 resaltado) y a la Red2 se le agregaron los desniveles 11 y 12. Ambas constan de 8 ménsulas con la siguiente nomenclatura: Agrimensura Vieja (AV), Agrimensura Nueva (AN), Partenón (P), Química1 (Q1), Química2 (Q2), Hidráulica (H), Decanato (D),

Construcciones(C). Estas ménsulas serán el soporte físico de las cotas de superficies equipotenciales cuyo valor será el resultado del ajuste de las observaciones de desnivel realizadas. (AV) sirvió para establecer el datum de referencia.

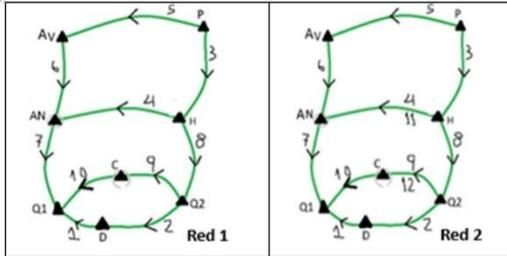


Figura1: Redes Altimétricas FI-UNLP.

Tabla1: Desniveles (m).

Desniveles	Valor
D-Q1	-0,1101
Q2-D	-0,3737
P-H	1,613
H-AN	0,4136
P-AV	-16,189
AV-AN	18,2177
AN-Q1	0,86
H-Q2	1,7579
Q2-C	-0,8975
C-Q1	0,4112
H-AN	0,4136
C-Q2	0,8922

## MATERIALES Y MÉTODOS

El levantamiento de los desniveles, se realizó mediante el método de nivelación geométrica desde el medio [2] con niveles automáticos de 28 aumentos.

Para la obtención de un estimador de las cotas  $\hat{x}_{MCP}$  por MCP consideramos que los desniveles de la red altimétrica denotados con  $y_i$ , pueden ser representados mediante un modelo lineal que relaciona lo desniveles de la red, con las variables predictoras  $a_i$  de la red de grafos que indica el itinerario entre las ménsulas que se mide el desnivel, tal que:

$$y_i = a_i x + \varepsilon_i \quad i = 1, 2 \dots n \quad \text{con } y_i \in R \quad a_i \in R^p \quad (1)$$

$\varepsilon_i$  es un vector de errores aleatorios del modelo con una distribución Normal con media 0 y varianza  $\sigma_i^2$ .

En este caso  $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i}$  con una ponderación  $w_i = \frac{1}{L_i}$  donde  $L_i$  es la longitud del recorrido necesario para obtener cada medición. El vector  $x$  representa el parámetro a estimar que corresponde al vector de las cotas. Dado que la varianza de  $\varepsilon_i$  no es constante, hace necesario aplica MCP en lugar de Mínimos Cuadrados

Ordinarios (MCO). El ajuste por MCP se puede tratar como MCO, si escribimos (1) como:

$$\tilde{y}_i = \tilde{a}_i x + \tilde{\varepsilon}_i \quad i = 1, 2 \dots n \quad (2)$$

$$\text{con } \tilde{y}_i = \sqrt{w_i} y_i \quad \tilde{a}_i = \sqrt{w_i} a_i \quad \tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{w_i} \varepsilon_i$$

Considerando  $\tilde{A}$  la matriz de  $n \times p$  con elementos  $\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2} \dots \tilde{a}_{ip})$ , el vector  $\tilde{\varepsilon}$  es un vector con elementos  $\tilde{\varepsilon}_i$  y el vector  $\tilde{y}$  con elementos:

$$\tilde{y}_i \text{ con } i = 1, 2 \dots n, \text{ con: } \tilde{y} = \tilde{A}x + \tilde{\varepsilon} \quad (3)$$

Para encontrar el estimador del vector de parámetros  $\hat{x}_{MCP}$  por MCP se busca el vector  $x$  que minimiza la función  $[(\tilde{y} - \tilde{A}x)^t (\tilde{y} - \tilde{A}x)]$  La resolución del sistema de Ecuaciones Normales de MCP lleva a la siguiente expresión matricial:

$$\hat{x}_{MCP} = \text{inv}(\tilde{A}^t \tilde{A}) \cdot \tilde{A}^t \tilde{y} \quad (4)$$

Y se calcula la matriz varianza covarianza de este estimador llamada  $\Sigma(\hat{x}_{MCP})$  por la siguiente expresión:

$$\Sigma(\hat{x}_{MCP}) = \sigma^2 \text{inv}(\tilde{A}^t \tilde{A}) \quad (5)$$

Pero como  $\sigma^2$  es desconocido, se estima con la suma de los cuadrados de los residuos (SSR) dividido  $n - p$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSR}{n-p} = \frac{[(\tilde{y} - \tilde{A}\hat{x}_{MCP})^t (\tilde{y} - \tilde{A}\hat{x}_{MCP})]}{n-p} \quad (6)$$

Con lo que resulta que:

$$\hat{\Sigma}(\hat{x}_{MCP}) = \hat{\sigma}^2 \text{inv}(\tilde{A}^t \tilde{A}) \quad (7)$$

La diagonal de esta matriz corresponde a la incertidumbre estimada de las cotas ajustadas por MCP ¿Cómo sería el algoritmo de Ajuste Secuencial?

A medida que se incorporan nuevas mediciones a una red posible el recálculo y actualización de la misma [3]. Como resultado se obtiene una actualización de las cotas de la red y sus incertidumbres El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1-Sea  $\tilde{A}_n \in R^{n \times p}$  la matriz que contiene las  $n$  filas de la matriz  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{y}_n$  las  $n$  componentes de  $\tilde{y}$  de (3) y  $\tilde{\varepsilon}_n$  las  $n$  componentes de  $\tilde{\varepsilon}$  con  $\tilde{y}_n = \tilde{A}_n x + \tilde{\varepsilon}_n$  se puede definir el estimador de  $x$  por MCP con las  $n$  mediciones como:  $\hat{x}_n = \text{inv}(\tilde{A}_n^t \tilde{A}_n) \cdot \tilde{A}_n^t \tilde{y}_n$  (8)

Y su matriz de covarianza estimada como:  $\hat{\Sigma}_n(\hat{x}_{MCP}) = \hat{\sigma}^2 \text{inv}(\tilde{A}_n^t \tilde{A}_n)$  (9)

2-Luego se calcula la nueva actualización del vector de parámetros  $\hat{x}_{n+1}$  con el ingreso se una nueva medición de  $\tilde{y}_{n+1}$  y de  $\tilde{a}_{n+1}$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + k (\tilde{y}_{n+1} - \tilde{a}_{n+1} \hat{x}_n) \quad (10)$$

$$\text{Con } k = \frac{\hat{\Sigma}_n(\hat{x}_{MCP}) \tilde{a}_{n+1}}{\hat{\sigma}^2 + \tilde{a}_{n+1} \hat{\Sigma}_n(\hat{x}_{MCP}) \tilde{a}_{n+1}^t} \quad (11)$$

Y la actualización de la matriz varianza covarianza estimada de  $\hat{x}_n$  denotada por:  $\hat{\Sigma}_n(\hat{x}_{MCP})$  resulta ser:

$$\hat{\Sigma}_{n+1}(\hat{x}_{MCP}) = \hat{\Sigma}_n(\hat{x}_{MCP}) - k\tilde{\alpha}_{n+1} \hat{\Sigma}_n(\hat{x}_{MCP}) \quad (12)$$

3- Por último, se tienen las cotas actualizadas y su matriz de covarianzas:  $\hat{x}_{n+1}$  y  $\hat{\Sigma}_{n+1}(\hat{x}_{MCP})$   
¿Cómo se realiza el Test de Chow?

Dadas la Red1 y la Red2 de la Figura 1 se calcula  $SSR_{RED1}$  también se calcula  $SSR_{RED2}$ . Finalmente, se calcula el estadístico de Chow:  $\frac{SSR_{red2} - SSR_{red1}}{SSR_{red1}} \frac{3}{2}$  que sigue una distribución Fisher  $\mathcal{F}(2,3)$  bajo la hipótesis nula de que las cotas son iguales para ambas redes. Si el valor del estadístico de prueba del Test de Chow es significativo (es decir, si cae fuera de un intervalo crítico determinado por el nivel de significancia  $\alpha$ ), se rechaza la hipótesis nula y se concluye que ha ocurrido un cambio estructural en el modelo. Este test puede ser incorporado en el script para el cálculo de MCPS [4].

## RESULTADOS

En la Tabla 2 se presentan los resultados del ajuste de las cotas correspondientes a cada pilar. Se observa en Cotas1 Antiguo, el ajuste por MCP de la Red1 de la Figura 1 y en la 3ª columna la desviación estándar de las mismas. En la columna Cotas2 MCP, se muestra el ajuste tradicional con MCP de la Red2 de la Figura 1 y en la 5ª columna su desviación estándar. En la columna Cotas3 MCPS se presentan los resultados de las cotas ajustadas por MCPS de la Red2 de la Figura 1 y en la última columna sus desviaciones estándar.

Tabla 2. Cotitas Ajustadas y desviaciones estándar(m).

Pilar	Cotas1 Antiguo	Desv 1	Cotas2 MCP	Desv 2	Cotas3 MCPS	Desv 3
AN	18,2172	0,0007	18,2172	0,0011	18,2172	0,0005
Q1	19,0770	0,001	19,0773	0,0015	19,0772	0,0007
D	19,1874	0,0012	19,1874	0,0017	19,1874	0,0008
Q2	19,5615	0,0011	19,5611	0,0015	19,5612	0,0007
H	17,8033	0,0009	17,8033	0,0012	17,8033	0,0006
P	16,1900	0,0009	16,1899	0,0013	16,1899	0,0006
C	18,6650	0,0012	18,6662	0,0017	18,6658	0,0008

Se realiza un Test Chi-Cuadrado para el ajuste de la Red1, confirmando que las desviaciones están en concordancia con las especificaciones del fabricante que informa una varianza kilométrica de 0,002mm, indicando consistencia entre las mediciones realizadas y las marcas físicas establecidas. Con el ajuste MCP de la Red2 de la Figura 1 se realizó un Test Chi-Cuadrado con  $\alpha = 0,05$  que dio significativo ya que:

$$\chi_{red}^2 = 5 \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = 5 \frac{0.00398^2}{0.002^2} \not\leq \chi_{2,5}^2 = 12.8325. \quad (13)$$

Esto implica una anomalía en la actualización de la red o un cambio significativo en la relación entre las variables predictoras, concordante con el cambio de la ménsula C. Lo mismo ocurre con el ajuste por MCPS de la Red2 la Figura 1, el Test dio significativo:

$$\chi_{red}^2 = 5 \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = 5 \frac{0.00403^2}{0.002^2} \not\leq \chi_{2,5}^2 = 12.8325 \quad (14)$$

Se realiza el test de Chow para ver si hay cambio estructural entre cotas1 y Cotas2 que no resulta significativo con  $\alpha = 0,05$  (Ecuación 15)

$$\frac{SSR_{Cotas2} - SSR_{Cotas1}}{SSR_{Red1}} \frac{3}{2} = \frac{7.903923e-05 - 2.123469e-05}{2.123469e-05} \frac{3}{2} = 4.08 \not\leq \mathcal{F}_{0,05}(2,3) = 9.55 \quad (15)$$

El test de Chow entre Cotas1 y Cotas3 tampoco da significativo con  $\alpha = 0,05$  (Ecuación 16)

$$\frac{SSR_{Cotas3} - SSR_{Cotas1}}{SSR_{Red1}} \frac{3}{2} = \frac{8.131273e-05 - 2.123469e-05}{2.123469e-05} \frac{3}{2} = 4.24386 \not\leq \mathcal{F}_{0,05}(2,3) = 9.55 \quad (16)$$

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El algoritmo de MCPS demostró su relativa facilidad de aplicación y su eficiencia computacional. Presentó una aproximación numérica que alcanzó al orden de la mitad de la incertidumbre estándar del parámetro estimado por MCP. Es el caso de la ménsula C donde la diferencia entre las estimaciones de la cota de MCPS alcanza +0,0004m por sobre la estimación de MCP, siendo su desviación estándar de 0,0017m. Se verificó que el estadístico de Chow no fue sensible para la detección de cambio en el estado como lo fue el estadístico de Chi-Cuadrado. Consideramos que la aplicación de MCPS debe ser justificada en un contexto que permita ese orden de discrepancias. También se debe buscar otro estadístico que pueda ser sensible a los cambios esperados.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Justo C. (2018) *Tratamiento Estadístico de una Red Altimétrica Topográfica*. Tesis de Maestría en Ingeniería UNLP.
- [2] Wolf, P. y Ghilani, C. (2006). *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*, Fourth Edition. Wiley. USA, 611.
- [3] Teunissen P.J.G. (2007). *Dynamic Data Processing, Series on Mathematical Geodesy and Positioning*, Ed.VSSD, Países Bajos, 241.
- [4] Arrufat, J.L. (1990). Mínimos Cuadrados Recursivos, *Económica*; 36, 3-20.